Chapitre 7 : Les distributions de probabilité et calcul de paramètres

Objectif général du chapitre :

Connaitre les notions fondamentales de la probabilité et maitriser le calcul de ses paramètres.

I. Rappel de probabilité

Objectifs spécifiques :

- Rappeler les connaissances ultérieures sur la probabilité.

Durée : 1,5 H.

Contenu :

1) L'analyse combinatoire :

Soit Ω est formé de « n » d'évènements possibles, avec « p » le nombre d'éléments choisis de n.

❖ Ordre intervient

Sans répétition :

☺ Arrangement :

$$p < n : A^{p}{}_{n} = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}$$

☺ Permutation :

$$p = n : P_{n} = n\,! = A^{n}{}_{n}$$

Avec répétition :

☺ Arrangement :

$$p > n : A^{P}{}_{n} = n^{P}$$

☺ Permutation :

$$p = n : P_{n}^{n1,\, n2,\, \ldots,\, np} = \frac{n\,!}{n_1\,!\; n_2\,! \ldots n_p\,!}$$

❖ Ordre n'intervient pas

Sans répétition : Combinaison :

$$p < n : C_{n}^{P} = \frac{n\,!}{(n-p)!\,p!}$$

Avec répétition : Combinaison :

$$p > n : K^{P}\,n = C^{P}{}_{n+p-1} = \frac{(n+p-1)\,!}{(n-1)!\,p!}$$

2) Définitions et axiomes de calcul de probabilités :

A / Définitions :

a – Expérience (ou épreuve) aléatoire : Dont le résultat n'est pas connu à l'avance. Exemple : jet d'une pièce de monnaie.

b – Ensemble fondamental ou référentiel (noté Ω) :

C'est l'ensemble de toutes les éventualités (ou résultats) possibles d'une expérience aléatoire. Exemple :

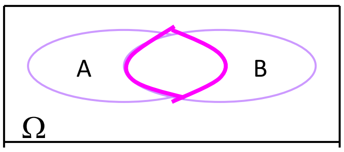
Expérience aléatoire	*Ensemble fondamentale*
Jet d'une pièce de monnaie :	$\Omega = \{ P, F \}$.
Jet d'un dé :	$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.
Jet de deux dés :	$\Omega = \{ (1, 1),\ (1, 2),\ldots (6, 6) \}$.

c – Evénement A : Est un sous-ensemble quelconque de Ω. Trois remarques sont évidentes :

- Deux événements A et B peuvent être incompatibles (ne se produisent pas en même temps) ou compatibles (peuvent se réaliser en même temps).
- L'événement certain est celui qui se réalise toujours. Par ailleurs, l'événement impossible (noté Ø) est celui qui ne se produit jamais.
- L'événement contraire de A (noté $\bar{A}$) est le complémentaire de A dans Ω.

Deux opérations peuvent être effectuées sur les événements :

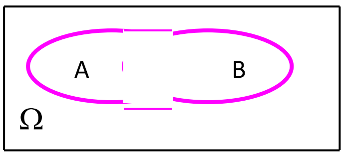
- ✓ $A \cap B$: est la réalisation simultanée de deux événements A et B.



Titre : Graphique 1 : Diagramme de VENN

L'intersection de deux évènements.

- ✓ $A \cup B$: est la réalisation d'au moins un des deux événements a et B (soit A ou B, soit les deux).



Titre : Graphique 2 :

L'union de deux évènements.

Ces deux opérations admettent plusieurs propriétés :

- $A \cup \bar{A} = \Omega$; $A \cup \emptyset = A$; $A \cup \Omega = \Omega$
- $A \cap \bar{A} = \emptyset$; $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap \Omega = A$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ } C'est la loi de MORGAN.
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- A et B sont deux événements incompatibles $\Longleftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$.
- $\bar{\bar{A}} = A$.

B/ Famille probabilisables ou Algèbre de BOOLE :

Soit β une famille d'événement de Ω. β est appelée algèbre de BOOLE si :

☼ β est stable par passage au complémentaire : Quel que soit $A \in \beta$, alors $\bar{A} \in \beta$.

☼ β est stable par passage à la réunion, quel que soit A et $B \in \beta$, alors, $A \cup B \in \beta$.

Deux conséquences se présentent suite à cette définition :

♪ $\Omega \in \beta$ et $\emptyset \in \beta$.

♪ Quel que soit A et $B \in \beta$, alors, $A \cap B \in \beta$.

C/ Les axiomes de calcul des probabilités :

a/ Définition :

Soit (Ω, β) un espace probabilisable. Soit une application $P : \beta \rightarrow [0, 1]$, tels que :

Axiome 1 : Quel que soit $A \in \beta$, $P(A) \geq 0$.

Axiome 2 : $P(\Omega) = 1$.

Axiome 3 : Quel que soit A et $B \in \beta$, tel que $A \cap B = \emptyset$, alors, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Axiome 4 : Quel que soit $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \beta$, tel que $A_i \cap A_j = \emptyset$, avec $i \neq j$, alors :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup, \ldots, \cup A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Remarque : Soit $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, alors deux choses doivent être notées :

- Les événements élémentaires $\{a_i\}$ sont équiprobables si :

$$P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) = \ldots = P(\{a_n\}) = \frac{1}{n}.$$

- Si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, avec $k \leq n$, on :

$$P(A) = \frac{nb-de-cas-favorables-A}{nb-total-de-cas-possibles} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}.$$

La probabilité P vérifie les propriétés suivantes.

b/ Propriétés :

- Quel que soit A et B $\in \beta$, tel que A $\subset$ B, alors, P(A) ≤ P(B).
- Quel que soit A $\in \beta$, P($\overline{A}$) = 1 – P(A).
- P (Ø) = 0.
- Quel que soit A et B $\in \beta$, tel que A $\cap$ B = Ø, alors, P (A $\cup$ B) = P (A) + P (B) – P(A $\cap$ B).

Cette dernière propriété peut être généralisée de la manière suivante :

Quel que soit $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \beta$, tels que $A_i \cap A_j$ = Ø, avec i $\neq$ j,

Alors, P ($A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$)

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum\sum_{i\langle j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum\sum\sum_{i\langle j \langle k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Par exemple,

P ($A1 \cup A_2 \cup A_3$) = P (A_1) + P (A_2) + P (A_3) – P ($A_1 \cap A_2$) – P ($A_1 \cap A_3$) – P ($A_2 \cap A_3$) + P ($A_1 \cap A_2 \cap A_3$).

D/ <u>Les probabilités composées :</u>

a/ La probabilité conditionnelle :

Soit A et B $\in \beta$, on appelle « probabilité conditionnelle de A relative à B » ou « probabilité de réalisation de A sachant que B est réalisée » : P(A / B) = $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, avec P(B) $\neq$ 0.

De même, « probabilité de réalisation de B sachant que A est réalisée » : P(B / A) = $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, avec P(A) $\neq$ 0.

b/ Les probabilités composées :

A partir des deux formules précédentes, on peut déduire que :

P (A $\cap$ B) = P (A) × P (B / A) = P (B) × P (A / B).

c/ L'indépendance entre deux événements:

Deux événements A et B sont indépendants si : P(A $\cap$ B) = P(A) × P(B).

L'indépendance est une relation réciproque.

Si A et sont indépendants, alors, on remarque les propriétés suivantes :

- P(A / B) = P(A), si P(B) $\neq$ 0.
- P(B/ A) = P(B), si P(A) $\neq$ 0.
- $\overline{A}$ et B sont indépendants.
- A et $\overline{B}$ sont indépendants.

- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

d/ L'indépendance totale :

Les trois événements A, B, C seront dits totalement indépendants si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

- A et B sont indépendants.
- A et C sont indépendants.
- B et C sont indépendants.
- A, B et C sont indépendants ($P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$).

II. Les distributions de probabilité

Objectifs spécifiques :

- Comprendre les distributions de probabilités et dénombrer leurs principes.

Durée : 1,5 H.

Contenu :

1) <u>Définition d'une variable aléatoire</u> (V. a) :

Soit (Ω , β , P) un espace probabilisé fini, on appelle Va X la fonction suivante :

$X : \Omega \rightarrow \Re$

$\omega \rightarrow X(\omega) = x$.

X est une variable aléatoire dont les valeurs sont des nombres donnés par les résultats d'une expérience.

Exemple 1 : On lance une pièce de monnaie deux fois et on considère la Va X suivante : le nombre de pille obtenues. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de X : X(Ω).

Ω = { (P, P), (P, F), (F, P), (F, F)}.

Donc, ω_1 nous donne deux fois pille, ω_2 : une pille puis une face, ω_3 : une face puis une pille. ω_4 : 2 fois face. (L'ordre intervient).

Alors, X(Ω) = { 0, 1, 2}.

Selon la nature de la X(Ω), on définie deux types de variables aléatoires (discrète et continue).

2) <u>La variable aléatoire discrète</u> (V a D) :

a/ Définition : On dit que la variable aléatoire X est discrète si l'une de ces deux conditions est satisfaite :

- $X(\Omega)$ est un ensemble fini et dénombrable (exemple 1 : nombre de pilles).
- $X(\Omega)$ est un ensemble infini et dénombrable ($\aleph$). Exemple 2 : Va X est le nombre de jets successifs nécessaire pour obtenir pille pour la première fois. $X(\Omega) = \{1, 2, ..., n\}$.

b/ Loi de probabilité d'une Va D ou la distribution de probabilité de X : (notée P_x)

P_x : $X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$

$X \rightarrow P_x = P[X = x] = P[\omega / X(\omega) = x]$

$P[X = x]$: est la probabilité que la Va X prenne la valeur x.

$P[\omega / X(\omega) = x]$: est la probabilité de l'événement ω pour lequel la Va X prenne la valeur x.

P_x possède deux propriétés :

♦ Quelque soit $x \in X(\Omega)$, $P_x \geq 0$.

♦ $\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = 1$.

Application à l'exemple 1 : Déterminez la loi de probabilité de la Va X (le nombre de pilles).

$\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F,F)\}$.

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Quelque soit $x \in X(\Omega)$, $P_x = P[X = x]$

$P_0 = P[X = 0] = P[(F, F)] = \frac{1}{4}$.

$P_1 = P[X = 1] = P[(P, F), (F,P)] = \frac{2}{4}$.

$P_2 = P[X = 2] = P[(P, P)] = \frac{1}{4}$.

$X(\Omega)$	P_x
$x_1 = 0$	$\frac{1}{4}$
$x_2 = 1$	$\frac{2}{4}$
$x_3 = 2$	$\frac{1}{4}$
Total	1

Titre : Tableau 1 : Répartition de la loi de probabilité d'une pièce de monnaie selon le nombre de pilles.

c/ La fonction de répartition d'une Va D (f. r) :

La fonction de répartition d'une Va D est, par définition, l'application :

$F : \Re \rightarrow [0, 1]$

$x \rightarrow F(X) = P[X < x]$

La formule de calcul de cette fonction de répartition est la suivante : F(X) = P [X < x] = $\sum_{xi \langle x} P_{xi}$

.

Remarque : il faut noter qu'à partir de la fonction de répartition, on peut déterminer la loi de probabilité P_x grâce à la relation suivante : Px_i = F(x_{i+1}) - F(x_i).

La fonction de répartition présente les quatre propriétés suivantes :

♦ Quelque soit x $\in$ X (Ω), $0 \leq F(X) \leq 1$.

♦ $\lim_{x \to -\infty}$ F(x) = 0 ; $\lim_{x \to +\infty}$ F(x) = 1.

♦ F est une fonction croissante : pour tout $x_1 > x_2$, F (x_1) ≥ F (x_2).

♦ F est une fonction continue à gauche et discontinue à droite.

Application à l'exemple 1 : Déterminez la fonction de répartition de la Va X (le nombre de pille).

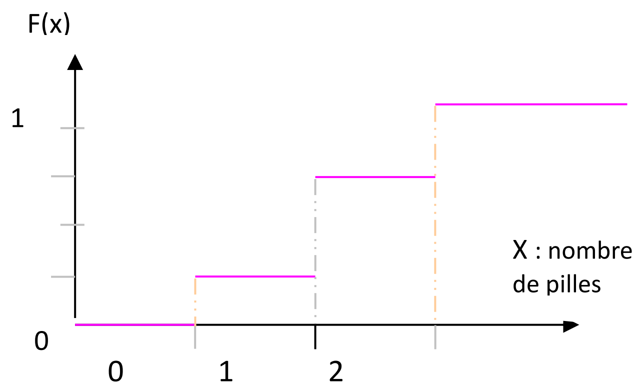
F(X) = P [X < x] = $\sum_{xi \langle x} P_{xi}$.

F(0) = P [X < 0] = $\sum_{xi \langle 0} P_{xi}$ = 0.

F(1) = P [X < 1] = $\sum_{xi \langle 1} P_{xi}$ = P_0 = $\frac{1}{4}$.

F(2) = P [X < 2] = $\sum_{xi \langle 2} P_{xi}$ = $P_0 + P_1$ = $\frac{3}{4}$.

X (Ω)	P_x	F(x)
$x_1 = 0$	$\frac{1}{4}$	0
$x_2 = 1$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$
$x_3 = 2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} < 1$
Total	1	



3) *La variable aléatoire continue* (Va C) :

a/ Définition : Une variable aléatoire X est dite continue si X (Ω) est un ensemble infini non dénombrable (prend la forme d'un intervalle ou une réunion d'intervalles).

Exemple 3 : X est le temps d'attente d'un bus, X (Ω) = [0, 20 min].

b/ La fonction de répartition d'une Va C (f, r) :

La fonction de répartition d'une Va C est l'application F : $\Re \rightarrow [0, 1]$

$x \rightarrow F(X) = P[X < x]$

Sa formule de calcul s'écrit de la manière suivante : F(X) = P [X < x] = $\int_{-\infty}^{x} f(t)$ dt

avec f(t) la densité de probabilité (d. d. p) associée à Va t.

Cette fonction de répartition admet les propriétés suivantes :

- Quelque soit x $\in$ X (Ω), 0 ≤ F (X) ≤ 1.
- $\lim_{x \to -\infty}$ F(x) = 0 ; $\lim_{x \to +\infty}$ F(x) = 1.
- F est une fonction croissante : pour tout $x_1 > x_2$, F (x_1) ≥ F (x_2).
- F est une fonction continue et dérivable (sauf en un nombre finie de points).
- Quelque soit x $\in$ [a, b], avec a et b deux constantes, on a :

P [a ≤ X ≤ b] = P [X ≤ b] - P [X ≤ a] = F(b) – F(a).

- Quelque soit x $\in$ [a, b], avec a et b, c trois constantes, on a :

P [X ≥ c] = 1 - P [X ≤ c] = 1 – F(c).

- P[X = a] = P [a ≤ X ≤ a] = F(a) – F(a) = 0.

c/ La densité de probabilité d'une Va C (d d p) :

C'est la fonction f(x) = F'(x).

Elle présente les propriétés suivantes :

♠ Quelque soit x $\in$ X (Ω), f(x) ≥ 0.

♠ Quelque soit x $\notin$ X (Ω), f(x) = 0.

♠ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ = 1.

Exemple d'application :

Soit la fonction suivante $f(x) = \begin{cases} k\,e^{-x/2}, & \text{si } x \geq 0. \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

a. Déterminez la constante k pour que f(x) soit une d d p.
b. Déterminez sa fonction de répartition (f, r).
c. Déterminez la probabilité que : $\begin{cases} 2 < x < 4. \\ 5 < x. \\ x < -2. \end{cases}$

<u>Solution :</u>

1- X (Ω) = [0, +∞ [, alors, k $e^{-x/2}$ ≥ 0, d'où k ≥ 0.

Pour que f(x) soit une d d p, il faut que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$\Leftrightarrow$ $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ = 1 car $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ = 0 (puisque f(x) n'est pas définie dans] - ∞, 0]).

$\Leftrightarrow \quad \int_0^{+\infty} k e^{-\frac{x}{2}} dx = 1 \Leftrightarrow k \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx = 1 \Leftrightarrow k\,[\,-2\,e^{-x/2}\,]_0^{+\infty} = 1$,

puisque la primitive de e^{ax} est $\frac{e^{ax}}{a}$.

$\Leftrightarrow -2\,k\,[\,e^{-\infty} - e^0\,] = 1 \Leftrightarrow 2\,k = 1$,car $e^{-\infty} = 0$ et $e^0 = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$.

$$\Leftrightarrow \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{-x/2}, & \text{si } x \geq 0. \\ 0 & \text{, sinon.} \end{cases}$$

1

2- La fonction de répartition de f(x) :

$F(X) = P\,[\,X < x\,] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ avec $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{-t/2}, & \text{si } t \geq 0. \\ 0 & \text{, sinon.} \end{cases}$

Pour $x \in]-\infty, 0\,]$, $F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$.

Pour $x \in [\,0, +\infty\,[$, $F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x e^{\frac{-t}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\,[\,-2\,e^{\frac{-t}{2}}\,]_0^x = -\,e^{\frac{-x}{2}} + e^{0} = 1 - e^{\frac{-x}{2}}.$$

$$\text{D'où,} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{-x}{2}}, & \text{si } x \geq 0. \\ 0 & \text{, sinon.} \end{cases}$$

3 - $P\,[\,2 < X < 4\,] = F(4) - F(2)$

$$= (1 - e^{\frac{-4}{2}}) - (1 - e^{\frac{-2}{2}}) = e^{-1} - e^{-2} = 0,232.$$

* $P\,[\,5 < x\,] = 1 - P\,[\,x < 5\,] = 1 - F(5) = 1 - (\,1 - e^{\frac{-5}{2}}\,) = 0,082$.

* $P\,[\,x < -2\,] = F(-2) = 0$, car $-2 \notin X(\Omega)$.

III. Les caractéristiques d'une probabilité

Objectifs spécifiques :

- Identifier et maîtriser les caractéristiques d'une probabilité.

Durée : 1,5 H.

Contenu :

1) <u>L'espérance mathématique</u> :

a/ Définition : L'espérance mathématique d'une Va X, notée E (X), est une moyenne arithmétique.

On va distinguer les deux cas : discret et continu.

Va D

E (X) = $\sum_{i=1}^{n} x_i P_{xi}$

Application à l'exemple 1 :

E (X) = $(0 \times \frac{1}{4}) + (1 \times \frac{2}{4}) + (2 \times \frac{1}{4}) = 1$

Va C

E (X) = $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

Application à l'exemple 3 :

E (X) = $\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{2} e^{\frac{-x}{2}} dx$

Rappel de l'intégration par partie :

$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [\, u(t)\, v(t)\,]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$

On pose: $\begin{cases} u(t) = x \rightarrow u'(t) = 1 \\ v(t) = - e^{\frac{-x}{2}} \rightarrow v'(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{-x}{2}} \end{cases}$

E (X) = $\frac{1}{2} [\, x\, (-2)\, e^{\frac{-x}{2}}\,]_0^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} -2 e^{\frac{-x}{2}} dx$

$= [\, -x\, e^{\frac{-x}{2}}\,]_0^{+\infty} + [\, -2\, e^{\frac{-x}{2}}\,]_0^{+\infty}$

$= 0 - 0 + (-2) (e^{\infty} - e^{0}) = -2 (0 - 1)$

E (X) = 2.

b/ Propriétés:

- La linéarité : quel que soit (a, b) $\in \Re^2$, on a : E (b) = b,
  E (a X) = a E (X),
  E (a X + b) = a E (X) + b.
- Soit X et Y deux variables aléatoires, on a : E (X + Y) = E (X) + E (Y).
- Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, on a : E (X × Y) = E (X) × E (Y)

2) <u>La variance :</u>

a/ Définition : la variance d'une Va X (notée par V(X)) est définie par : V(X) = E[X – E (X)]^2.

On distingue les deux cas suivants :

Va D

V(X) = E [X – E (X)]^2

$= \sum_{i=1}^{n} [x - E(X)]^2 P_x$

Va C

V(X) = E [X – E (X)]^2

$= \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$

$\sigma_{(X)} = \sqrt{V(X)}$

Application à l'exemple 1:

X	0	1	2
P_x	1 / 4	2 / 4	1 / 4

On a E(X) = 1,

$$V(X) = (0-1)^2\ \frac{1}{4} + (1-1)^2\ \frac{2}{4} + (2-1)^2\ \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

b/ Propriétés :

♠ La formule développée de la variance est : $V(X) = E(X^2) - [\,E(X)\,]^2$.

♠ La linéarité : quel que soit $(a, b) \in \Re^2$, on a : $V(b) = 0$,

$V(aX) = a^2\,E(X)$,

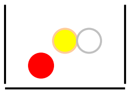
$V(aX + b) = a^2\,E(X)$.

$\sigma_{(aX+b)} = |a|\ \sigma_{(X)}$.

♠ Soit X et Y deux variables indépendantes, on a : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

__Exercice :__

On tire, simultanément, deux boules sans remise d'une urne qui contient : une boule rouge, une blanche et une jaune. On considère que la Va X est : le nombre de boules rouge tirées.



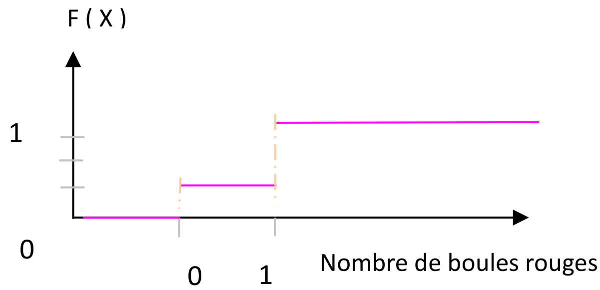
$\Omega = \{ (R, B), (R, J), (J, B) \}$

$X(\Omega) = \{0, 1\}$.

$P_0 = \frac{1}{3}$, $P_1 = \frac{2}{3}$.

$F(X) = P[\,X < x\,] = \sum_{xi\langle x} P_{xi}$.

$X(\Omega)$	P_x	$F(X)$
0	1 / 3	0
1	2 / 3	1 / 3
Total	1	



$$E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i P_{xi} = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} [x - E(X)]^2 P_x = (0 - \frac{2}{3})^2 \times \frac{1}{3} + (\frac{1}{3} - \frac{2}{3})^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

<u>Exercice :</u>

On lance trois pièces de monnaie une fois, combien d'entre elles présentent le côté face et quelles sont leurs probabilités correspondantes ?

Résultat du lancement	FFF	FFP	FPF	PFF	FPP	PFP	PPF	PPP
Nombre de face	3	2	2	2	1	1	1	0
Probabilité	1 / 8	1 / 8	1 / 8	1 / 8	1 / 8	1 / 8	1 / 8	1 / 8

Titre : Tableau 4 : Probabilité d'une pièce de monnaies, lancée 3 fois, selon le nombre de faces.

La probabilité d'avoir deux fois face est :

Nombre de face	0	1	2	3
Probabilité	1 / 8	3 / 8	3 / 8	1 / 8

Titre : Tableau 5 : Probabilité associée au nombre de faces.